О Т З Ы В

официального оппонента
на диссертационную работу Савастеева Дениса Владимировича
"Некоторые вопросы качественной теории дифференциальных уравнений на стратифицированных множествах",
представленную к защите на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы
и оптимальное управление

Диссертация Д. В. Савастеева связана с направлением исследований в качественной теории дифференциальных уравнений, которое было инициировано около 20 лет назад работами его научного руководителя О. М. Пенкина. Это направление посвящено анализу свойств дифференциальных уравнений на множествах, которые в первых работах назывались "клеточными комплексами", а затем за ними закрепилось название "стратифицированных многообразий" или, в более простом варианте, "стратифицированных множеств". Так называются множества, разлагаемые в набор многообразий (или, проще, фрагментов) разной размерности, называемых "стратами", которые специальным образом сочленены между собой (как, к примеру, куб разлагается на тело, грани, ребра, вершины). Разложение имеет смысл тогда, когда поведение каждого фрагмента описывается своим дифференциальным уравнением, связывающим изменение тех или иных характеристик вдоль данного фрагмента с влиянием на этот фрагмент примыкающих к нему фрагментов большей размерности.

Модели в виде уравнений на стратифицированных множествах возникают во множестве в различных сферах науки и инженерной практики. Обычный способ работы с такими объектами – анализ по фрагментам с последующим сопряжением этих фрагментов. Спецификой же качественной теории является то, что вся совокупность дифференциальных соотношений на разных фрагментах рассматривается как единое дифференциальное уравнение, и основной интерес в этой теории представляют синтетические результаты, в которых данный объект проявляет свои свойства как целого. Образцовым примером здесь является один из первых результатов, полученных в этом направлении – это принцип максимума (слабый), аналогичный принципу максимума для эллиптического уравнения в $\mathbb{R}^n$.

Следует отметить, что подобного рода объекты начали практически одновременно начали изучаться разными учёными. За рубежом – это научная группа S. Nicaise и ряд отдельных исследователей в Италии, Испании, Франции, Германии, впрочем, их интересы лежат более в области функционально-аналитических свойств таких уравнений (операторные свойства, спектр, полугруппы и т.п.). Из отечественных работ нельзя не упомянуть весьма специфическую статью Б. С. Павлова и М. Д. Фадеева (в которой поведение электронной оболочки атома моделируется системой, составленной из $\mathbb{R}^3$, в ряде точек сопряжённой с некоей сетью), оставшуюся, впрочем, без дальнейшего развития, и направление работ А. И. Шафаревича с учениками, где аналогичные модели возникали как некие гидродинамические структуры, а уравнения на фрагментах описывали изменения тех или иных характеристик этих структур. Тем не менее, именно качественные вопросы попрежнему остаются прерогативой научной школы О. М. Пенкина, и в этом аспекте отечественная математика остаётся лидирующей.

В развитие этого направления и выполнена работа диссертанта. Автором рассматриваются эллиптические и параболические дифференциальные уравнения и неравенства на стратифицированных множествах, и исследуются такие свойства, как лемма о нормальной производной, принцип максимума (в "сильной" форме – об отсутствии локальных нетривиальных максимумов), неравенство Харнака, теорема об устранимой особенности. Все эти результаты по идеологии являются, в той или иной степени, аналогами известных классических теорем, однако специфика стратифицированного множества налагает на них столь существенный отпечаток, что не только средства и способ их обоснования, но и даже формулировка может радикально отличаться от классических. Охарактеризуем кратко основные результаты, полученные в диссертации.

Введение содержит канонические характеристики диссертации (новизна, значимость, апробация и др.) и перечисление основных результатов. В первой главе излагаются основные понятия и объекты качественной теории дифференциальных уравнений на стратифицированных множествах. Вводятся понятия стратифицированного множества (автор не употребляет термин "многообразие", поскольку в рассматриваемой работе все страты являются плоскими), стратифицированного шара, векторного поля, дивергенции, меры, потока; определяются дифференцирование, эллиптический дифференциальный оператор (в дивергентной и координатной форме), соответствующие функциональные пространства, гармонические функции.

Вторая глава содержит изложение сильного принципа максимума и леммы о нормальной производной. Вот здесь начинает "играть" специфика стратифицированного многообразия. Если в классическом случае лемма о нормальной производной просто "дополняет" принцип максимума, то в случае стратифицированного множества, где дифференциальное уравнение на всех промежуточных стратах содержит и нормальную производную по примыкающим стратам большей размерности, оказывается, что лемма о нормальной производной выходит на центральное место как аппаратное средство обоснования принципа максимума.

Само доказательство леммы о нормальной производной достаточно искусное, и основную трудность в нём представляет построение барьерной функции – специального возмущения решения, которое используется в схеме доказательства. Автору удалось подобрать такую барьерную функцию в виде комбинации квадратичной функции и экспоненты. Отметим, что было бы интересно перенести этот результат и на случай стратифицированного многообразия (поскольку он имеет локальный характер), и это – вполне очевидное направление дальнейших исследований.

Затем доказывается уже принцип максимума для эллиптического и параболического неравенства. Отметим, что в отличие от классического случая, на стратифицированном множестве локальные экстремумы у решений эллиптических дифференциальных уравнений и неравенств могут быть, но они обязательно являются "тривиальными", то есть решение является при этом константой на целом страте, содержащем точку экстремума.

Третья глава диссертации посвящена доказательству неравенства Харнака. Здесь уже явно появляются характеристики, специфичные только для стратифицированных множеств, которые в классическом случае даже не могли возникнуть. Одной из таких характеристик оказывается характеристика, получившая название "прочности". В наиболее простом, "грубом" варианте она означает невозможность сопряжения стратов, размерность которых отличается более, чем на единицу. Впервые это понятие появилось в работах О. М. Пенкина и его учеников около 15 лет назад, и с тех пор постоянно используется в различных модификациях – в зависимости от того, какие свойства исследуются, приходится так или иначе варьировать это понятие. В представленной работе вводится понятие прочности, которое обеспечивает выполнение неравенства, аналогичного классическому неравенству Харнака и (это будет использовано в следующей главе) теоремы об устранимой особенности.

Обоснование неравенства Харнака автор строит достаточно сложным, так сказать, "многоэтажным" образом. Сначала на базе некоего упрощённого (в том смысле, что задаётся ограничение на тот компакт, на котором устанавливается неравенство) варианта неравенства Харнака доказывается достаточно тонкая и трудная лемма (хотя, на мой взгляд, её вполне можно было бы назвать теоремой) о сходимости гармонических функций – сначала с дополнительным ограничением на последовательность точек, а затем уже без него. И только потом, уже на основании этой леммы, неравенство Харнака доказывается в общей постановке – для произвольного компакта.

Центральный результат диссертации представлен автором в четвёртой главе. Это – теорема об устранимой особенности. Отметим, что устанавливается она только для так называемого "мягкого" лапласиана, который отличается тем, что уравнение фактически задано только на стратах максимальной и на единицу меньше максимальной размерности. Но и в этом случае задача требует большого искусства и мастерства. Основная проблема – соотнести оценки градиента решения вблизи особенности (автор доказывает, что эти особенности – порядка не выше первого) со стратифицированными мерами шаров, окружающих точку особого множества, так, чтобы можно было обосновать наличие потока векторного поля градиента через поверхность этих шаров и стремление потока к нулю при стягивании поверхности в точку. На основании этого автор доказывает теорему о равенстве средних, а затем, используя неравенство Харнака и лемму о сходимости гармонических функций – и собственно теорему об устранимой особенности.

Все полученные автором результаты являются новыми, нетривиальными, высокотехнологичными. обоснования не оставляют сомнений в их правильности и демонстрируют высокую математическую культуру автора. Не будет преувеличением сказать, что эти результаты явно превосходят кандидатский уровень.

Замечаний по существу, которые я мог бы сделать по такой достаточно сложной работе, нет.

Таким образом, можно дать общую положительную оценку диссертационной работы Д. В. Савастеева как оригинального, достаточно сложного в содержательном и изощрённого в техническом смысле исследования. Основные результаты диссертации опубликованы (в том числе в журналах из "Перечня" ВАК) и апробированы на семинарах и конференциях.

Автореферат полностью и правильно отражает содержание диссертации.

Полученные автором результаты могут быть использованы в исследованиях, проводимых в МГУ имени М. В. Ломоносова, СПбГУ, НГУ, РУДН, в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН, в Саратовском, Воронежском, Белгородском, Челябинском государственных университетах, в других научно-исследовательских центрах России.

Таким образом, в диссертации автором решена чрезвычайно трудная серия задач качественной теории дифференциальных уравнений на стратифицированных множествах. Рассматриваемая работа полностью удовлетворяет требованиям Положения ВАК РФ о порядке присуждения научным и научно-педагогическим работникам ученых степеней, предъявляемым к кандидатским диссертациям по физико-математическим наукам, а ее автор Д.В. Савастеев заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Официальный оппонент
доктор физико-математических наук, доцент,
профессор кафедры дифференциальных уравнений
Московского государственного университета
имени М.В. Ломоносова А.В. Боровских

Адрес: 119991, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ,
механико-математический факультет,
кафедра дифференциальных уравнений
Телефон: +7-(495)-939-16-31.
E-mail: bor.bor@mail.ru

Подпись А.В. Боровских заверяю ... ...гова Л.Л.